**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA** **P.A. 2007-2**
**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA** **20/10/2007**
**AREA ACADEMICA DE CIENCIAS BASICAS Y HUMANIDADES**

**SOLUCIONARIO DE LA SEGUNDA PRÁCTICA**
**CALIFICADA DE CALCULO NUMERICO (MB535)**

- **DURACION: 60 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

## Problema 1

a) Si $A = D - L - U$, demostrar que para resolver el sistema $A\,x = b$ se puede aplicar el siguiente método iterativo en su forma matricial:

$$T = (D-U)^{-1} L \qquad C = (D-U)^{-1} b$$
$$x^{(k+1)} = T\,x^{(k)} + C$$

b) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

¿Para qué valores de $\alpha$ es convergente al aplicar el método iterativo descrito en a).?

c) Realice 03 iteraciones con $\alpha = 3$ y muestre el error. Comente sus resultados.

## Solución

a)

$$(D-L-U)x = b$$
$$(D-U)x = Lx + b$$
$$multiplicando\ por\ (D-U)^{-1}$$
$$x = (D-U)^{-1} Lx + (D-U)^{-1} b$$

$$T = (D-U)^{-1} L \qquad C = (D-U)^{-1} b$$
$$x^{(k+1)} = T\,x^{(k)} + C$$

b)

$$T = (D-U)^{-1} L = \begin{bmatrix} \frac{a}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(T) = \left|\frac{a}{4}\right| < 1$$

$$-4 < a < 4$$

c)

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$x^{(0)}$=[ 0  0 ]$^T$
$x^{(1)}$=[-2 2]$^T$
$x^{(2)}$=[-3.5 3]$^T$
$x^{(3)}$=[-4.625 3.75]$^T$
$err = \left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\|_\infty = 1.125$

Se observa una convergencia lenta :
Probemos con otra aproximación inicial:

$x^{(0)}$=[-7 5]$^T$
$x^{(1)}$=[-7.25 5.5]$^T$
$x^{(2)}$=[-7.4375 5.6250]$^T$
$x^{(3)}$=[-7.5781 5.7188]$^T$
$err = \left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\|_\infty = 0.1406$

El error es menor que el obtenido antes.

**Problema 2**

Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a. Localizar los valores propios de A.
b. Mediante el método de la Potencia Inversa partiendo de $z^{(0)} = [1\ 1\ ]^T$ aproxime el valor propio de menor valor absoluto. Realice 03 iteraciones.
c. Acelerar el método de la Potencia Inversa utilizando el método de la potencia inversa iterada con desplazamiento $q = \dfrac{(z'*A*z)}{z'*z}$ partiendo de $z^{(0)} = [1\ 1\ ]^T$ Realice 03 iteraciones.

**Solución:**
(a) Localización de valores propios:

Por Gershegorin, teniendo en cuenta que la matriz es simétrica, tendrá valores propios reales:

$0 \le z \le 8$

(b) Método de la potencia inversa

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$z^{(0)} = [1 \ 1 \ ]^T$$

$$y^{(1)} = Bz^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mu^{(1)} = 0.5$$

$z^{(1)}$= [0 1]'

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{\mu^{(1)}} = 2$$

$z^{(2)}$= [-1/3 1]'

$\lambda^{(2)} = 4/3$

$z^{(3)}$= [-2/5 1]'

$\lambda^{(3)}$ =6/5=1.2

(c)

$$q = \frac{(z^{(0)}{}'*A*z^{(0)})}{z^{(0)}{}'*z^{(0)}} = 6$$

$$B = (A - qI)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z^{(0)} = [1 \ 1 \ ]^T$$

$$y^{(1)} = Bz^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 1.5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\mu^{(1)} = 1.5$$

$z^{(1)}$= [0 0.3333]'

$$\lambda^{(1)} = q + \frac{1}{\mu^{(1)}} = 6 + \frac{1}{1.5} = 6.6667$$

$z^{(1)}$= [1.0000 0.3333]'

$\lambda^{(1)}$ = 6.6667

$z^{(2)}$= [1.0000 0.4286]'

$\lambda^{(2)}$ = 6.8571

$z^{(3)}$= [1.0000 0.4118]'

$\lambda^{(3)}$ = 6.8235

**Problema 3.**

Dada la función : $f(x) = -1 + \frac{\ln(x+a)}{e^x}$ , se pide:

a) Obtener el dominio de definición de f(x) para $a \in \Re$ dado.

b) Discutir gráficamente cuantos puntos de corte tienen las funciones $e^x$ y $\ln(x+a)$, según su posición relativa.

c) Si $a$=4, encuentre intervalos iniciales de 0.5 de ancho para cada cero.

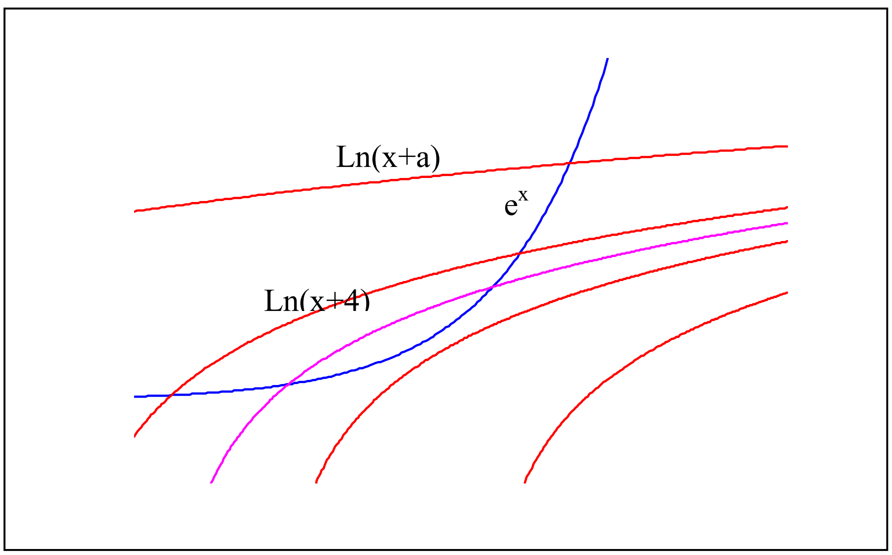
d) Para f(x)=0 con $a$=4, determine el menor cero (en valor absoluto) realizando 03 iteraciones de Bisección.

e) Con la última aproximación encontrada en d) empezar el método de Newton realizando 02 iteraciones.

**Solución**

a) $(x+a)>0 \Rightarrow \forall\, x>-a$

b)




c) x1$\in$ [-3.4 -2.9] x2$\in$[0 0.5]

d) Método de la Bisección

| a | x | b | F($a$) | F($x$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.25 | 0.5 | + | + |
| 0.25 | 0.375 | 0.5 | + | + |
| 0.375 | 0.4375 | 0.5 | | |

e) Método de Newton Raphson

| x | F(x) | F'(x) | $\lvert$-F(x)/F'(x)$\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0.4375 | -0.0587 | -1.3235 | 0.04444 |
| 0.3931 | -0.0016 | -12540 | 0.0012 |
| 0.3919 | | | |

**Los Profesores**